Homojen olmayan Denklem sistemlerinin çözümü

$AX=B$ sisteminde $B\neq 0$ ise sisteme homojen olmayan denklem sistemi denir. Bu kısıma kadar denklem sistemlerinin elemanter işlemler yardımıyla çözümünü gördük. Burada ise denklem sistemlerinin çözümünde determinantlardan faydalanacağız.

Cramer Sistemleri

Bu durum $m=n$ ve $\det A\neq 0$ olması halidir.

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\dots+a_{nn}x_n=b_n$$

sisteminde $|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}\neq 0$

olmak üzere

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}}{\det A}, \quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}}{\det A}$$

$$x_n=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n\end{vmatrix}}{\det A}$$

şeklinde bulunur.

Örnek:

$$-2x_1+3x_2-x_3=1$$
$$x_1+2x_2-x_3=4$$
$$-2x_1-x_2+x_3=-3$$

sistemini çözünüz.

Çözüm:

$$A=\begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det A=(-2)(2-1)-3.(1-2)+(-1)(-1+4)=-2+$$

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-2}=\frac{1(+1)-3(1)-1(2)}{-2}=2$$

$$x_2=\frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix}}{-2}=\frac{-2(1)-1(-1)-1(5)}{-2}=3$$

$$x_3=\frac{\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & -3 \end{vmatrix}}{-2}=\frac{-2(-2)-3(5)+1(3)}{-2}=4$$

Cramer Olmayan Lineer Denklem Sistemlerinin Çözümü

$m=n$ ve $|A|=0$ dır.

Tanım (Asli Determinant - İlaveli Asli Determinant):

$AX=B$ sisteminde $\operatorname{rank} A=p$ olsun. A dan seçilen determinantı sıfırdan farklı $p\times p$ tipindeki alt matrisin determinantına sistemin bir asli determinantı denir ve δ_p ile gösterilir.

Katsayılar matrisinde ilk p satır ve ilk p sütun δ_p nin matrisi olacak biçimde denklemlerin sırasını ve bilinmeyenlerin yerlerini değiştirmek mümkündür.

A matrisinin asli determinanti δ_p de yer almamış $m-p$ tane satırdan birini satır, B yi de sütun alarak δ_p nin matrisine eklersek $(p+1)$. mertebeden bir matris elde ederiz. Bu matrisin determinantına sistemin ilaveli asli determinantı denir. Bu çeşit determinant sayısı her δ_p için $m-p$ tanedir.

$AX=B$ lineer denklem sisteminin çözümünün olabilmesi için $\Leftrightarrow$ bütün ilaveli asli determinantların sıfır olmasıdır.

Örnek: Katsayılar matrisi $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ ve

sabitler matrisi $B=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$ olan denklem sistemi için

bir asli determinant ve buna bağlı tüm ilaveli asli determinantları bulunuz.

Çözüm: rank $A=1$ dir.

$\delta_1=|1|=1\neq 0$ asli determinant

$\delta_{1+1}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=-2\neq 0$ ilaveli asli determinant

$\delta_{1+2}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}=6\neq 0$ 〃 〃

sistemin çözümü yoktur.

Başka bir asli determinant

$\delta_1=|4|=4\neq 0$ alınabilir.

$\delta_{1+1}=\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=4\neq 0$ $\delta_{1+2}=\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}=20\neq 0$

ilaveli asli determinantlar.

Örnek: $x+y+z=1$, $2x+2y+z=3$, $2x+2y+2z=2$ } lineer denklem sistemini asli ve ilaveli asli determinant yrd. ile çözünüz.

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&2&1\\2&2&2\end{bmatrix}, \quad |A|=0, \quad \text{rank}A=2 \text{ dir.}$$

$$\delta_2=\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix}=-1\neq 0$$ (asli det.)

$$\delta_{2+1}=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&1&3\\2&2&2\end{vmatrix}=0$$ ilaveli asli det.

Sistemin çözümü vardır. $3-2=1$ parametreye bağlı

$$y=t \Rightarrow \left.\begin{array}{l}x+z=1-t\\2x+z=3-2t\end{array}\right\}$$ bu sistem cramerdir.

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1-t&1\\3-2t&1\end{vmatrix}}{-1}=2-t, \quad z=\frac{\begin{vmatrix}1&1-t\\2&3-2t\end{vmatrix}}{-1}=-1$$

Çözüm kümesi $\left\{\begin{array}{l}x=2-t\\y=t\\z=-1\end{array}\right.$

Örnek! $\begin{aligned} -2x+y+z&=5 \\ x-2y+z&=-2 \\ x+y-2z&=-3 \end{aligned}$ lineer denk. sist. çözünüz.

Çözüm! $A=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, $|A|=0$ rank $A=2$

$\delta_2=\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=3\neq 0$ asli det.

$\delta_{2+1}=\begin{vmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}=0$ ilaveli asli det.

çözüm var.

$\left.\begin{aligned} -2x+y+z&=5 \\ x-2y+z&=-2 \end{aligned}\right\} z=t$ $\quad \begin{aligned} -2x+y&=5-t \\ x-2y&=-2-t \end{aligned}$

Cramer

$x=\dfrac{\begin{vmatrix} 5-t & 1 \\ -2-t & -2 \end{vmatrix}}{3}=t-\dfrac{8}{3}$, $y=\dfrac{\begin{vmatrix} -2 & 5-t \\ 1 & -2-t \end{vmatrix}}{3}=t-\dfrac{1}{3}$

$\begin{cases} x=t-\dfrac{8}{3} \\ y=t-1/3 \\ z=t \end{cases}$

Örnek: $mx+ny+z=1$
$x+mny+z=n$
$x+ny+mz=1$
} sisteminin çözümlerini m ve n ye göre irdeleyiniz

Çözüm: Katsayılar determinantı

$$\det A=\begin{vmatrix} m & n & 1 \\ 1 & mn & 1 \\ 1 & n & m \end{vmatrix}=n(m-1)^2(m+2)$$

1) $n\neq 0$, $m\neq 1$ ve $m\neq -2$ ise $\det A\neq 0$ olup sistem cramer sistemidir. Tek çözüm vardır.

2) $n=0$ olsun.

$$\det A=\begin{vmatrix} m & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & m \end{vmatrix}=0 \text{ dır.}$$

a) $m=1$ ise $\operatorname{rank}A=1$

$\delta_1=|m|=|1|\neq 0$

$$\delta_{1+1}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-1\neq 0 \text{ çözüm yoktur.}$$

b) $m\neq 1$ olsun. ($\operatorname{rank}A=2$)

$$\delta_2=\begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=m-1\neq 0$$

$$\delta_{2+1}=\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix}=2m-2=2(m-1)\neq 0$$

Çözüm yoktur.

3) $m=1$ olsun.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & n & 1 \\ 1 & n & 1 \\ 1 & n & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{rank} A = 1$$

$\delta_1 = |1| \neq 0$

$$\delta_{1+1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & n \end{vmatrix} = n-1$$

$n=1$ için $\delta_{1+1} = 0$ olur.

$$\delta_{1+2} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$m=1$ için $n=1$ alınırsa çözüm vardır.

$y=t$, $z=k$ için $x = 1-t-k$ dır.

4) $m=-2$ olsun.

$$\det A = \begin{vmatrix} -2 & n & 1 \\ 1 & -2n & 1 \\ 1 & n & -2 \end{vmatrix} = 0 \text{ dır.} \quad \text{rank} A = 2$$

$$\delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \qquad \delta_{2+1} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & n \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -3n+$$

$n=-2$ için çözüm vardır. Çözümü bulalım.

$$\left.\begin{aligned} mx - 2y + z &= 1 \\ x + 4y + z &= -2 \end{aligned}\right\} \boxed{y=t} \text{ için } \begin{aligned} \overset{-2}{m}x + z &= 1+2t \\ x + z &= -2-4t \end{aligned}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1+2t & 1 \\ -2-4t & 1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{1+2t+2+4t}{3} = \boxed{2t+1}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1+2t \\ 1 & -2-4t \end{vmatrix}}{-3} = \frac{4+8t-1-2t}{-3} = \frac{6t+3}{-3}$$

$$\boxed{z = -2t-1}$$